Калибровка измерительного преобразователя

1. Прямые измерения

Объект калибровки является измерительным преобразователем с некоторым диапазоном измерений. Эталон является мерой (многозначной или однозначной) или стандартным образцом. Калибровка проводится в *J* (*j=1..J*) точках путем прямых измерений значения величины воспроизводимой эталоном в *j*-й точке *n* раз (*i=1..n*). Модель калибровки может быть представлена уравнением (1)

$$\Delta_j = X_j - A_j + \sum_{l=1}^{L} \varepsilon_{lj}, \tag{1}$$

$$X_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_{ij}, \tag{2}$$

или уравнением (3)

$$X_j = A_j + \Delta_j + \sum_{l=1}^{L} \varepsilon_{lj}, \tag{3}$$

где Δ_j – ошибка (погрешность) показаний объекта калибровки;

X_{ij} – результат i-го измерения величины воспроизводимой эталоном в j-й точке с помощью объекта калибровки;

A_j – значение величины воспроизводимой эталоном в j-й точке;

ε_{lj} – поправка связанная с l-м источником неопределенности в j-й точке.

Обычно ε_l принимают равными 0 в аддитивной модели или 1 в мультипликативной, а их неопределенности u_l учитывают в бюджете неопределенности с соответствующими коэффициентами чувствительности. Для уравнения (3) величина поправки сама по себе является источником неопределенности показаний и так же должна быть учтена в бюджете неопределенности. Типичные источники неопределенности представлены в таблице

Источник неопределенности	ε_l	Оценка неопределенности
Повторяемость измерений	*s*	См. (5) или (6)
Калибровка эталона	*A*	Сертификат калибровки
Нестабильность эталона*	*s(A)*	См. СМК 04 И 21
Цена деления, дискретность показаний или разрешающая способность объекта калибровки	*d*	$d/\left(2 \cdot \sqrt{3}\right)$
Нелинейность показаний объекта калибровки	*r*	См. (9) и далее
** для эталонов в виде сертифицированных стандартных образцов неопределенность от нестабильности уже включена в неопределенность аттестованного значения*		

Расширенная неопределенность в *j*-й точке рассчитывается по формуле

$$U_j = k \cdot u_{c\,j} = k \cdot \sqrt{{u_{A\,j}}^2 + \sum_{l=1}^{L} \left(c_{lj} \cdot u_{lj}\right)^2}, \tag{4}$$

$${u_{A\,j}}^2 = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{ij} - X_j\right)^2, \tag{5}$$

где k – коэффициент охвата (k=2);

$u_{c\,j}$ – суммарная стандартная неопределенность;

c_{lj} – коэффициент влияния с l-го источника неопределенности в j-й точке;

$u_{A\,j}$ – стандартная неопределенность типа А.

Для случая если эталон так же является измерительным преобразователем дисперсия среднего его показаний так же включается в (5) или, если показания эталона и объекта калибровки фиксируют одномоментно, то стандартная неопределенность типа А вычисляется по формуле

$$u_{A_j}{}^2 = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_{ij} - \Delta_j\right)^2. \tag{6}$$

2. Косвенные измерения

Описанные модели так же применимы для <u>косвенных измерений</u> когда величина A_j представляет собой результат прямых измерений величин функционально с ней связанных. Тогда A_j в уравнении калибровки представляют в виде этой функции, а в бюджете неопределенности учитывают неопределенность исходных величин.

Например, для калибровки дозатора жидкости по величине объема дозирования используют весы. Тогда уравнение (1) можно записать в общем виде

$$\Delta_j = V_j - \frac{m_j}{\rho} + \varepsilon(s)_j + \varepsilon(m)_j + \varepsilon(\rho) + \varepsilon(d)_j + \varepsilon(t)_j, \tag{7}$$

где V_j – среднее значение показаний дозатора в *j*-й калибруемой точке;
m_j – среднее значение массы жидкости в *j*-й калибруемой точке;
ρ – плотность дозируемой жидкости;
$\varepsilon(s)_j$ – поправка связанная с повторяемостью измерений;
$\varepsilon(m)_j$ – поправка связанная с калибровкой весов;
$\varepsilon(\rho)$ – поправка связанная с калибровкой плотномера;
$\varepsilon(d)_j$ – поправка связанная с дискретностью показаний дозатора;
$\varepsilon(t)_j$ – поправка связанная с влиянием температуры на плотность жидкости.

Принимая во внимание что величины V_j и m_j явно коррелированы, стандартную неопределённость связанную с повторяемостью измерений оценивают по формуле (6), а расширенную неопределенность по формуле

$$U_j = k \cdot \sqrt{u_{A_j}{}^2 + \left(\frac{1}{\rho} \cdot u(m)_j\right)^2 + \left(-\frac{m_j}{\rho^2} \cdot u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{d_j}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{m_j}{\rho^2} \cdot c(t) \cdot \frac{dt_j}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2}, \tag{8}$$

где $u(m)_j$ – стандартная неопределенность измерения массы жидкости в *j*-й калибруемой точке;
$u(\rho)$ – стандартная неопределенность измерения плотности жидкости;
d – дискретность показаний дозатора;
dt – изменение температуры жидкости;
$c(t)$ – зависимость плотности жидкости от температуры.

3. Выбор модели

Выбор модели зависит от того, что является результатом калибровки. Если Δ используется для получения результата измерений, то выбирают модель (1) и результатом калибровки является $\Delta_j \pm U_j$. В иных случаях выбирают модель (3), а Δ становится еще одним источником неопределенности. Тогда необходимо оценить диапазон калибровки и нелинейность объекта калибровки в этом диапазоне, т.к. результатом калибровки является $X \pm U$ для любого показания объекта калибровки X в установленном диапазоне $X_{min} \dots X_{max}$.

Для диапазона калибровки ограниченного крайними точками применяемых эталонов ±10 % ($0{,}9 \cdot A_{min} \dots 1{,}1 \cdot A_{max}$) расширенную неопределенность можно вычислить по формуле

$$U = k \cdot \sqrt{\max_{1<j\le J} u_{c_j}{}^2 + \frac{1}{J-2} \cdot \sum_{j=1}^{J} \Delta_j{}^2}, \tag{9}$$

или (например, при малом количестве точек калибровки - если J≤4) по формуле

$$U = k \cdot \sqrt{\max_{1<j\leq J}\left({u_c}_j{}^2 + \Delta_j{}^2\right)}. \quad (10)$$

Помимо этого, необходимо принимать во внимание является ли Δ величиной случайной или систематической. Так в некоторых случаях (если $\Delta/u_c > 4/3$) целесообразно воспользоваться детерминистической формулой (обоснование приведено в приложении)

$$U = \max_{1<j\leq J}\left(k \cdot {u_c}_j + \Delta_j\right). \quad (11)$$

Для экстраполяции точностных характеристик на более широкий диапазон измерений необходимо оценить зависимость величины Δ_j от диапазона. В предположении линейной зависимости[1]

$$\Delta(X) = \Delta_0 + a \cdot X, \quad (12)$$

вычисляют коэффициенты по формулам:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{j=1}^{J}(\Delta_j - \bar{\Delta})(X_j - \bar{X})}{\sum_{j=1}^{J}(X_j - \bar{X})^2}, \quad (13)$$

$$\hat{\Delta}_0 = \bar{\Delta} - \hat{a} \cdot \bar{X}. \quad (14)$$

Вычисляют характеристики точности аппроксимации по формулам:

$$S(\epsilon) = \sqrt{\frac{1}{J-2} \cdot \sum_{j=1}^{J} \Delta_j{}^2}, \quad (15)$$

$$S\left(\hat{\Delta}(X)\right) = S(\epsilon) \cdot \sqrt{\frac{1}{J} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum_{j=1}^{J}(X_j - \bar{X})^2}}, \quad (16)$$

и находят оценку границы погрешности для начальной (X_{min}) и конечной (X_{max}) точек диапазона по формуле

$$\Delta(X_R) = \max\begin{pmatrix} |\hat{a}| \cdot X_{min} + \Delta_0 + t_{p,J-2} \cdot S\left(\hat{\Delta}(X_{min})\right) \\ |\hat{a}| \cdot X_{max} + \Delta_0 + t_{p,J-2} \cdot S\left(\hat{\Delta}(X_{max})\right) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Смысл (17) графически представлен на рисунке 1. На этом примере видно, что максимальная величина Δ без учета знака наблюдается в точке X_{max}=3000. Это величина может характеризовать нелинейность для всего диапазона в качестве оценки сверху.

[1] Описанные походы так же подходят для других видов монотонных $\Delta = f(X)$ и, далее описанных, $U = f(X)$ когда не наблюдаются явные максимумы Δ или U в промежутке $X_{min} \ldots X_{max}$.

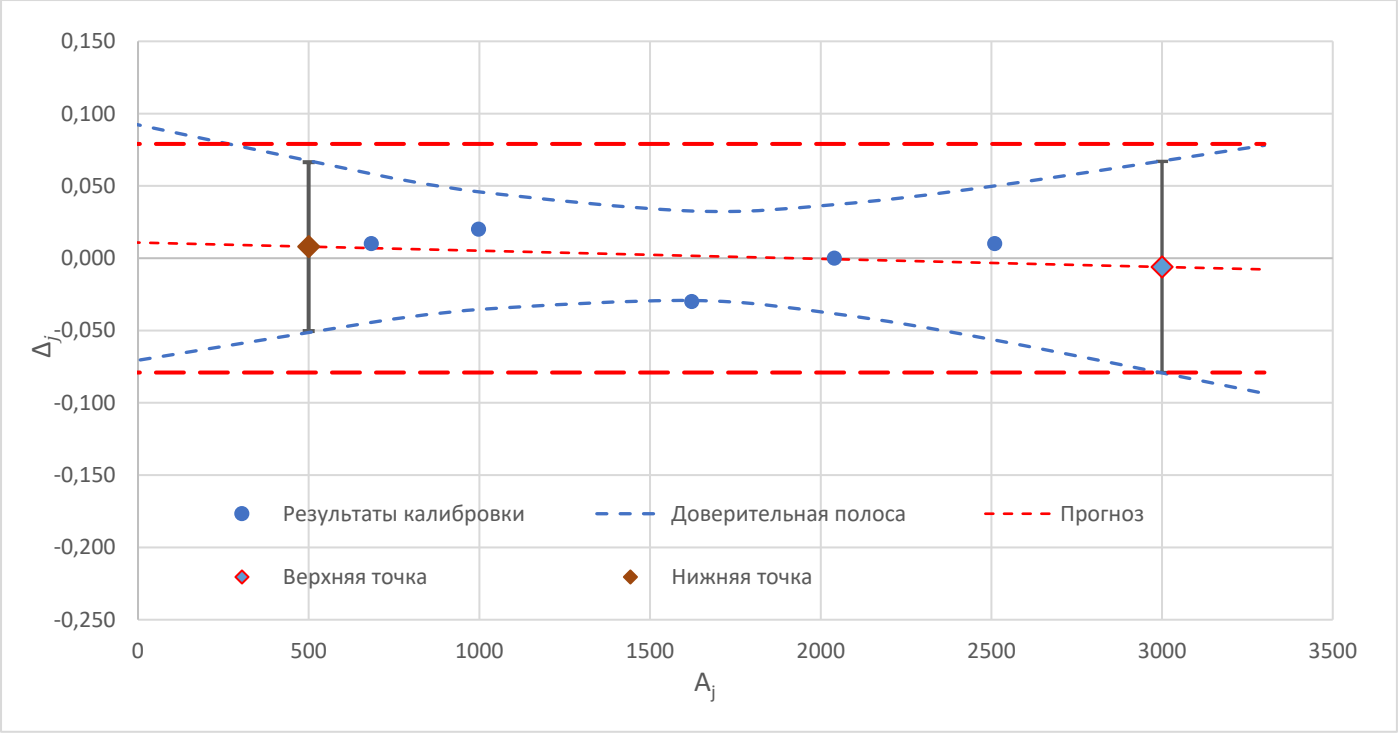

Рисунок 1 – Пример оценки неопределенности в диапазоне калибровки

Расширенную неопределенность для диапазона $X_{min} \dots X_{max}$ вычисляют по формуле

$$U = k \cdot \sqrt{\max_{1<j\leq J} {u_{c_j}}^2 + \Delta(X_R)^2} \tag{18}$$

При значимости углового коэффициента регрессии (12) наилучшей оценкой расширенной неопределенности будет

$$U = k \cdot \sqrt{\max_{1<j\leq J} {u_{c_j}}^2 + S\left(\hat{\Delta}(X_R)\right)^2} + |\hat{a}| \cdot X, \tag{19}$$

что соответствует комбинированию постоянной и относительной частей неопределенности (например, запись вида $U = \pm(0.1 + 0.01 \cdot X)$).

В случаях когда составляющие u_{c_j}, так же зависят от точки диапазона измерений целесообразно их так же помещать в относительную часть расширенной неопределенности. Для этого строят зависимость $U = f(X)$, находят коэффициенты линейного уравнения и его доверительный интервал по аналогии с описанным выше для $\Delta = f(X)$. Тогда минимальное значение расширенной неопределенности можно вычислить по формуле

$$U_{min} = |\hat{a}| \cdot X_{min} + \hat{U}_0 + t_{p,J-2} \cdot S\left(\hat{U}(X_{min})\right), \tag{20}$$

а максимальное по формуле

$$U_{max} = |\hat{a}| \cdot X_{max} + \hat{U}_0 + t_{p,J-2} \cdot S\left(\hat{U}(X_{max})\right). \tag{21}$$

Тогда

$$R = \frac{U_{max} - U_{min}}{X_{max} - X_{min}}, \tag{22}$$

и

$$U(X) = \pm(U_{min} + R \cdot X). \tag{23}$$

Графически этот подход представлен на рисунке 2.

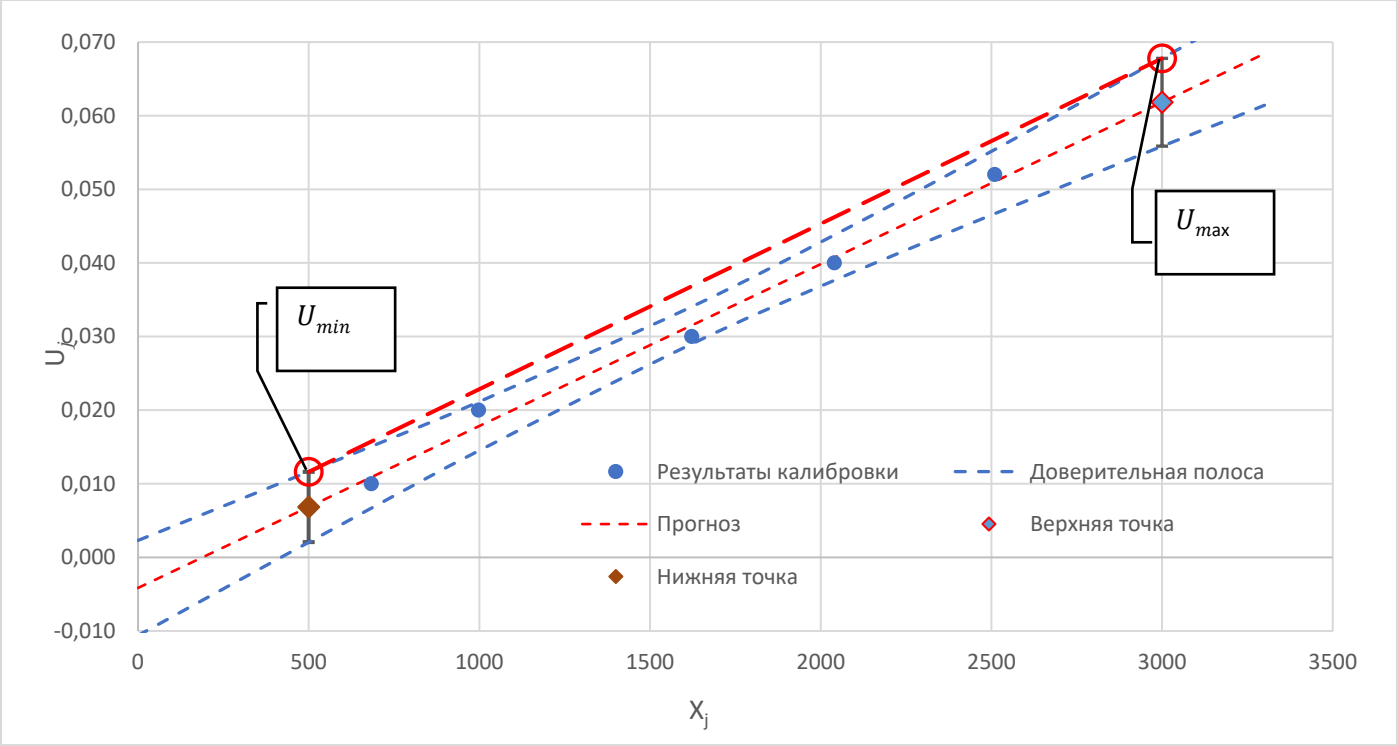

Рисунок 2 – Пример оценки комбинированной неопределенности

По своей природе неопределенность показаний оцененная по (9), (10), (11), (18), (19) или (23) носит систематический характер и в реальных ситуациях для оценки расширенной неопределенности результата измерений следует учитывать как эту систематику так и случайные эффекты. В некоторых ситуациях может быть оценена целевая (предельная) неопределенность типа А, например в виде среднего квадратического отклонения единичного результата измерений полученного при калибровке или в виде допуска установленного производителем объекта калибровки или установленного в методике измерений. Тогда для получения оценки сверху расширенной неопределенности результата измерений следует в расчетах по (9), (10), (11), (18), (19) или (23) использовать это предельное значение стандартной неопределенности типа А.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расширенная неопределённость

при сложении случайной и систематической составляющих погрешности

Существует два способа описания погрешностей измерений – детерминистический (интервальный) и вероятностный. При первом погрешности определяются интервалом значений, которые они могут принимать, например

$$|\xi| \le \Delta \tag{1}$$

В этом случае расширенная неопределённость результата измерений или его погрешности совпадает с границами этого интервала

$$U(\xi) = \Delta \tag{2}$$

Для суммы погрешностей справедлива цепочка неравенств

$$|\xi_1 + \xi_2| \le |\xi_1| + |\xi_2| \le \Delta_1 + \Delta_2 \tag{3}$$

из которой следует интервальный закон сложения расширенных неопределённостей

$$U(\xi_1 + \xi_2) = U(\xi_1) + U(\xi_2) \tag{4}$$

При вероятностном описании погрешностей наиболее часто используют СКО или, что то же самое стандартную неопределённость

$$u(\xi) = \sqrt{E\xi^2} \tag{5}$$

В этом случае для суммы погрешностей получаем

$$u(\xi_1 + \xi_2) = \sqrt{u^2(\xi_1) + u^2(\xi_2)} \tag{6}$$

если погрешности некоррелированы, то есть $E\xi_1 \cdot \xi_2 = 0$. Можно также перейти к интервальному описанию погрешностей, то есть к расширенной неопределённости, используя понятие коэффициента охвата $k(p)$, определяемого уравнением

$$P(|\xi| \le k(p) \cdot u(\xi)) = p \tag{7}$$

где $P(\cdot)$обозначает вероятность события записанного в скобках, а p - произвольное число из интервала (0,1). Таким образом для расширенной неопределённости при вероятностном описании погрешностей получаем

$$U(\xi) = k(p) \cdot u(\xi) \tag{8}$$

При калибровке средств измерений (СИ) их погрешности разбивают на две части – случайную и систематическую погрешности

$$\xi = b + \varepsilon \tag{9}$$

Где $b = E\xi$ есть систематическая, а $\varepsilon = \xi - b$ - случайная погрешности. В процессе калибровки оцениваются их характеристики, то есть величина b и $u(\varepsilon)$. Из (5) и (6) следует вероятностое правило для сложения случайных и систематических погрешностей

$$u(\xi) = u(b+\varepsilon) = \sqrt{u^2 + b^2} \tag{10}$$

где $u = u(\varepsilon)$. В этом случае для расширенной неопределённости при вероятностном описании погрешностей получают

$$U_2(b+\varepsilon) = k \cdot \sqrt{u^2 + b^2} \tag{11}$$

где $k = k(p)$ - коэффициент охвата. Однако ничто не мешает использовать и интервальный закон сложения расширенных неопределённостей (4), действующий при детерминистическом описании погрешностей. В этом случае

$$U_1(b+\varepsilon) = ku + |b| \tag{12}$$

Очевидно, выбор того или иного способа определяется тем, какой из них даёт меньшую неопределённость. Найдём, например, условия при которых

$$U_2(b+\varepsilon) \le U_1(b+\varepsilon) \tag{13}$$

то есть

$$k \cdot \sqrt{u^2 + b^2} \le ku + |b| \tag{14}$$

Возводя обе части (14) в квадрат, приводя подобные члены и разделив обе части полученного неравенства на $|b|$ (случай $|b| = 0$ не интересен, так как в этом случае неопределённости (11) и (12) совпадают), получаем

$$(k^2 - 1) \cdot |b| \le 2ku \tag{15}$$

Очевидно, для $k \le 1$ неравенство (15), а вместе с ним и (13) выполняется для любых значений b и u, следовательно, для расширенной неопределённости пользоваться необходимо вероятностной формулой (11).

Рассмотрим теперь случай $k > 1$. Из (15) получаем, что пользоваться вероятностной формулой (11) имеет смысл, если

$$\frac{|b|}{u} \le \frac{2k}{k^2 - 1} \tag{16}$$

Если же условие (16) не выполняется, то для расширенной неопределённости предпочтительнее детерминистическая формула (12). Например, при коэффициенте охвата $k = 2$, соответствующего для нормального распределения случайных погрешностей вероятности примерно 0.95 целесообразно пользоваться вероятностной формулой (11) если $\frac{|b|}{u} \le \frac{4}{3}$, в противном случае целесообразно использовать детерменистическую формулу (12).

Таким образом, мы приходим к вполне разумному выводу о том, что детерминистическую формулу (12) следует использовать, когда в погрешности доминирует систематическая часть (смещение), а вероятностную формулу (11), когда такого доминирования не наблюдается.